1

(1) 証明　$x^3=X$ とおくと，$x^{3m}-1=(x^3)^m-1=X^m-1$ である。

$P(X)=X^m-1$ とすると，$P(1)=1^m-1=0$ より

因数定理により，X^m-1 は $X-1$ で割り切れる。

したがって，$x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れる。　終

(2)　kは正の整数とする。

(i)　$n=3k$ のとき

(1) より、$x^{3k}-1$は x^3-1 で割り切れる。

このとき、$x^{3k}-1$ を x^3-1 で割った商を $Q(x)$ とすると、

$$x^{3k}-1=(x^3-1)Q(x)$$
$$=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)$$

よって$x^{3k}-1$をx^2+x+1で割った余りは 0 となる。

(ii)　$n=3k+1$のとき

$x^{3k+1}-1=(x^{3k}-1)x+x-1$ である。

(i)より, $x^{3k}-1$は x^2+x+1 で割り切れるから、

$x^{3k+1}-1$ を x^2+x+1で割った余りは $x-1$ となる。

これは，$k=0$ のときも成り立つ。

(iii)　$n=3k+2$のとき

$x^{3k+2}-1=(x^{3k}-1)x^2+x^2-1=(x^{3k}-1)x^2+(x^2+x+1)-x-2$ である。

(i)より$x^{3k}-1$は x^2+x+1 で割り切れるから、

$x^{3k+2}-1$ を x^2+x+1で割った余りは $-x-2$ となる。

これは，$k=0$ のときも成り立つ。

以上より，$\begin{cases} n=3k\,(\,k\text{ は正の整数}\,)\text{のとき，余り } 0 \\ n=3k+1\,(\,k\text{ は }0\text{ 以上の整数}\,)\text{のとき，余り } x-1 \\ n=3k+2\,(\,k\text{ は }0\text{ 以上の整数}\,)\text{のとき，余り } -x-2 \end{cases}$　…答

(3)　$t^{2024}-1=t^{3\times674+2}-1$であるから，(2)より，$t^{2024}-1$ を，t^2+t+1 で割った余りは $-t-2$ となる。

$t=-x$ とおくと，$(-x)^{2024}-1$ を$(-x)^2+(-x)+1$ で割った余りは $-(-x)-2$ となる。

よって, $x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った余りは$x-2$ である。…答

別解

整式の剰余を考える場合においても合同式の性質は失われない。

(1) 証明

以下，合同式はすべて mod x^3-1 とする。

このとき，$x^3-1\equiv 0$ すなわち $x^3\equiv 1$

$\therefore x^{3m}-1=(x^3)^m-1\equiv 1^m-1=0$

したがって，$x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れる。　終

(2) 以下，合同式はすべて mod x^2+x+1 とする。

このとき，$x^2+x+1\equiv 0$ すなわち $x^2\equiv -x-1$

$\therefore x^3\equiv -x^2-x\equiv -(-x-1)-x=1$

kを正の整数とすると，x^n-1を x^2+x+1 で割った余りはそれぞれ,

$n=3k-2$ のとき，$x^{3k-2}-1=x(x^3)^{k-1}-1\equiv x\cdot 1^{k-1}-1=x-1$

$n=3k-1$のとき，$x^{3k-1}-1=x^2(x^3)^{k-1}-1\equiv(-x-1)\cdot 1^{k-1}-1=-x-2$　…答

$n=3k$ のとき，　$x^{3k}-1=(x^3)^k-1\equiv 1^k-1=0$

(3) 以下，合同式はすべて mod x^2-x+1 とする。

このとき，$x^2-x+1\equiv 0$ すなわち $x^2\equiv x-1$

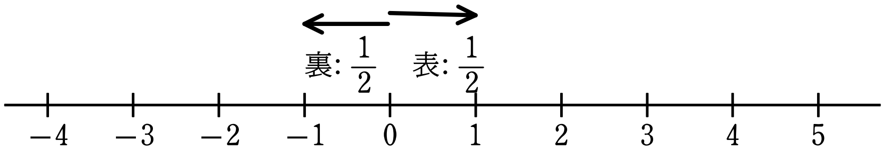
$\therefore x^3\equiv x^2-x\equiv x-1-x=-1$

したがって，$x^{2024}-1=x^2(x^3)^{674}-1\equiv(x-1)\cdot(-1)^{674}-1=x-2$

よって，求める余りは $x-2$　…答

$\boxed{2}$

1 回の試行で，表が出て正の向きに 1 だけ進む確率が $\dfrac{1}{2}$，裏が出て負の向きに 1 だけ進む確率も $\dfrac{1}{2}$ である。



(1)　$x_{10}=0$ となるのは，10 回の試行で表が 5 回，裏が 5 回出ればよいから

$${}_{10}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^{10}}=\frac{63}{256}\ \cdots 答$$

(2)　$x_5=1$ かつ $x_{10}=0$ となるのは，最初の 5 回の試行で表が 3 回，裏が 2 回出て，次の 5 回の試行で表が 2 回，裏が 3 回出ればよいから，その確率は

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^5}\right)^2=\frac{25}{256}$$

(1) の確率から，$x_5=1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を引いて

$$\frac{63}{256}-\frac{25}{256}=\frac{38}{256}=\frac{19}{128}\ \cdots 答$$

(3)　$0\leqq x_n\leqq 2$ ($n=1, 2, 3, \cdots, 9$) かつ $x_{10}=0$ となるのは，

$$x_1=1,\ \begin{cases}x_2=0\\ \text{または，}\\ x_2=2\end{cases} x_3=1,\ \begin{cases}x_4=0\\ \text{または，}\\ x_4=2\end{cases} x_5=1,\ \begin{cases}x_6=0\\ \text{または，}\\ x_6=2\end{cases} x_7=1,\ \begin{cases}x_8=0\\ \text{または，}\\ x_8=2\end{cases} x_9=1,\ x_{10}=0$$

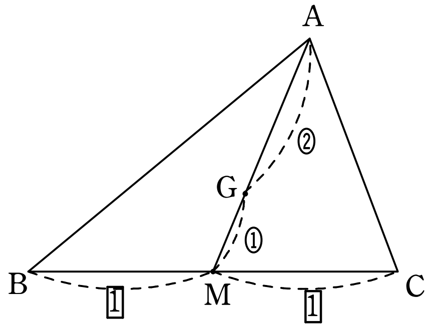
の場合であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{64}\ \cdots 答$$

3

(1) 証明

△ABCにおいて，辺BCの中点をMとする。重心Gは，線分AMを2 : 1の比に内分する点であるから



$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}\cdots①$$

同様に，$\overrightarrow{BG}=\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{3}\cdots②$　，$\overrightarrow{CG}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{3}\cdots③$

①,②,③を辺々加えて

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$$

よって，　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ が成り立つ。　終

(2) 証明

$$|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2=|\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GP}|^2+|\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GP}|^2+|\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GP}|^2$$

$$=3|\overrightarrow{GP}|^2-2\overrightarrow{GP}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$$

$$=3|\overrightarrow{GP}|^2-2\overrightarrow{GP}\cdot\vec{0}+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2\quad(\because (1)\text{による})$$

$$=3|\overrightarrow{PG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$$

よって，$|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2=3|\overrightarrow{PG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$ が成り立つ。　終

(3) 証明

$$\frac{1}{3}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2)=\frac{1}{3}(|\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}|^2)$$

$$=\frac{2}{3}(|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2)-\frac{2}{3}(\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA})$$

$$=\frac{2}{3}(|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2)$$

$$-\frac{1}{3}\{\overrightarrow{GA}\cdot(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+\overrightarrow{GB}\cdot(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA})+\overrightarrow{GC}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})\}$$

$$=\frac{2}{3}(|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2)-\frac{1}{3}\{\overrightarrow{GA}\cdot(-\overrightarrow{GA})+\overrightarrow{GB}\cdot(-\overrightarrow{GB})+\overrightarrow{GC}\cdot(-\overrightarrow{GC})\}$$

$$=\frac{2}{3}(|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2)+\frac{1}{3}(|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2)$$

$$=|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$$

よって，$|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2=\dfrac{1}{3}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2)$ が成り立つ。　終

(3) 別解 (2) を用いて証明する。

(i) P=Aとして，　$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=3|\overrightarrow{AG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$

(ii) P=Bとして，　$|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=3|\overrightarrow{BG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$

(iii) P=Cとして，　$|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2=3|\overrightarrow{CG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$

が成り立つ。これらを辺々加えて，

$$2(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2)=6(|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2)$$

よって，$|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2=\frac{1}{3}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2)$ が成り立つ。　終

(4) 証明

(2) において，点Pを△ABCの外心Oに置き換えると

$$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=3|\overrightarrow{OG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$$

$$=3|\overrightarrow{OG}|^2+\frac{1}{3}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2)\ (\because (3)\text{による})\cdots④$$

このとき，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=R$ であるから，④から

$$3R^2=3|\overrightarrow{OG}|^2+\frac{1}{3}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2)$$

$$R^2=\frac{1}{9}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2)+|\overrightarrow{OG}|^2\cdots⑤$$

⑤において，$|\overrightarrow{OG}|^2\geqq 0$ であるから

$$R^2\geqq\frac{1}{9}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2)$$ が成り立つ。

なお，等号成立は，$\overrightarrow{OG}=\vec{0}$ つまり，重心Gと外心Oが一致するときに限る。　終

$\boxed{4}$

放物線 $C: y=-x^2+1 \cdots$①　，円 $D: x^2+y^2=r^2 \cdots$②

⑴　①より，$x^2=1-y$ を②に代入して

$$1-y+y^2=r^2$$

$$y^2-y+1-r^2=0 \cdots ③$$

放物線 C と円 D は共有点をもたないので，方程式③の判別式を D_1 とすると，$D_1<0$ であればよい。

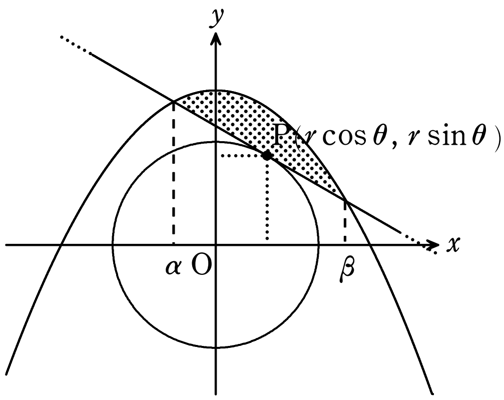
$$D_1=1-4(1-r^2)<0$$

$$4r^2-3<0$$

$$(2r+\sqrt{3})(2r-\sqrt{3})<0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<r<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$r>0$ であるから，　$0<r<\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdots$答



⑵　円 D 上の点 P($r\cos\theta$, $r\sin\theta$) における接線 ℓ の方程式は

$$(r\cos\theta)x+(r\sin\theta)y=r^2$$

$r>0$ より，　$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=r \cdots$④

①を④に代入して

$$(\cos\theta)x+(\sin\theta)(-x^2+1)=r$$

$$(\sin\theta)x^2-(\cos\theta)x+r-\sin\theta=0 \cdots ⑤$$

⑤において，$0<\theta<\pi$ より，$\sin\theta>0$ であり，放物線 C と接線 ℓ は2点で交わるので，⑤の2つの実数解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ ,\quad \alpha\beta=\frac{r-\sin\theta}{\sin\theta} \cdots ⑥$$

図より，$S=\displaystyle\int_\alpha^\beta\left\{(-x^2+1)-\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{r}{\sin\theta}\right)\right\}dx$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}} \cdots ⑦$$

ここで，$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ より，⑥を代入して

$$(\beta-\alpha)^2=\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2-4\cdot\frac{r-\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos^2\theta-4r\sin\theta+4\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{3\sin^2\theta-4r\sin\theta+1}{\sin^2\theta}$$

よって，⑦より　$S=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{3\sin^2\theta-4r\sin\theta+1}{\sin^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}} \cdots$答