1

(1) 証明 $x^3=X$ とおくと，$x^{3m}-1=(x^3)^m-1=X^m-1$ である。

$P(X)=X^m-1$ とすると，$P(1)=1^m-1=0$ より

因数定理により，X^m-1 は $X-1$ で割り切れる。

したがって，$x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れる。 終

(2) kは正の整数とする。

(ⅰ) $n=3k$ のとき

(1) より、$x^{3k}-1$は x^3-1 で割り切れる。

このとき、$x^{3k}-1$ を x^3-1 で割った商を $Q(x)$ とすると、

$$\begin{aligned} x^{3k}-1 &= (x^3-1)Q(x) \\ &= (x-1)(x^2+x+1)Q(x) \end{aligned}$$

よって$x^{3k}-1$をx^2+x+1で割った余りは0となる。

(ⅱ) $n=3k+1$のとき

$x^{3k+1}-1=(x^{3k}-1)x+x-1$ である。

(ⅰ)より, $x^{3k}-1$は x^2+x+1で割り切れるから、

$x^{3k+1}-1$ を x^2+x+1で割った余りは $x-1$ となる。

これは，$k=0$ のときも成り立つ。

(ⅲ) $n=3k+2$のとき

$x^{3k+2}-1=(x^{3k}-1)x^2+x^2-1=(x^{3k}-1)x^2+(x^2+x+1)-x-2$ である。

(ⅰ)より$x^{3k}-1$は x^2+x+1で割り切れるから、

$x^{3k+2}-1$ を x^2+x+1で割った余りは $-x-2$ となる。

これは，$k=0$ のときも成り立つ。

以上より，$\begin{cases} n=3k\,(k\text{ は正の整数})\text{ のとき，余り } 0 \\ n=3k+1\,(k\text{ は } 0 \text{ 以上の整数})\text{ のとき，余り } x-1 \\ n=3k+2\,(k\text{ は } 0 \text{ 以上の整数})\text{ のとき，余り } -x-2 \end{cases}$ …答

(3) $t^{2024}-1=t^{3\times674+2}-1$であるから，(2)より，$t^{2024}-1$ を，t^2+t+1 で割った余りは $-t-2$ となる。

$t=-x$ とおくと，$(-x)^{2024}-1$ を$(-x)^2+(-x)+1$ で割った余りは $-(-x)-2$ となる。

よって, $x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った余りは $x-2$ である。…答

別解

整式の剰余を考える場合においても合同式の性質は失われない。

(1) 証明

以下，合同式はすべて mod x^3-1 とする。

このとき，$x^3-1\equiv 0$ すなわち $x^3\equiv 1$

$\therefore\ x^{3m}-1=(x^3)^m-1\equiv 1^m-1=0$

したがって，$x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れる。　終

(2) 以下，合同式はすべて mod x^2+x+1 とする。

このとき，$x^2+x+1\equiv 0$ すなわち $x^2\equiv -x-1$

$\therefore\ x^3\equiv -x^2-x\equiv -(-x-1)-x=1$

kを正の整数とすると，x^n-1を x^2+x+1 で割った余りはそれぞれ,

$n=3k-2$ のとき，$x^{3k-2}-1=x(x^3)^{k-1}-1\equiv x\cdot 1^{k-1}-1=x-1$

$n=3k-1$のとき，$x^{3k-1}-1=x^2(x^3)^{k-1}-1\equiv(-x-1)\cdot 1^{k-1}-1=-x-2$　…答

$n=3k$ のとき，　$x^{3k}-1=(x^3)^k-1\equiv 1^k-1=0$

(3) 以下，合同式はすべて mod x^2-x+1 とする。

このとき，$x^2-x+1\equiv 0$ すなわち $x^2\equiv x-1$

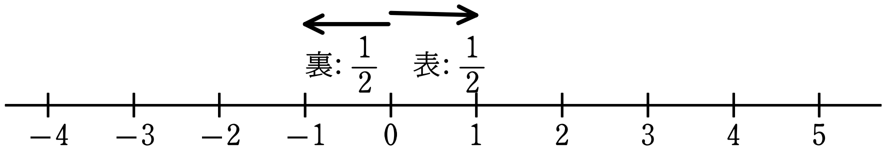
$\therefore\ x^3\equiv x^2-x\equiv x-1-x=-1$

したがって，$x^{2024}-1=x^2(x^3)^{674}-1\equiv(x-1)\cdot(-1)^{674}-1=x-2$

よって，求める余りは $x-2$　…答

$\boxed{2}$

1回の試行で，表が出て正の向きに1だけ進む確率は $\frac{1}{2}$，裏が出て負の向きに1だけ進む確率も $\frac{1}{2}$ である。



⑴　$x_{10}=0$ となるのは，10回の試行で表が5回，裏が5回出る場合であるから

$${}_{10}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^{10}}=\frac{63}{256}\quad\cdots答$$

⑵　$x_5=1$ かつ $x_{10}=0$ となるのは，最初の5回の試行で表が3回，裏が2回出て，次の5回の試行で表が2回，裏が3回出る場合であるから，その確率は

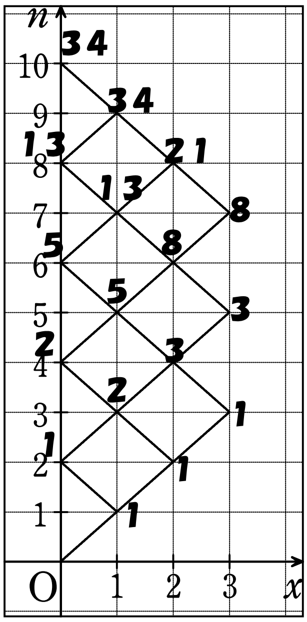
$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^5}\right)^2=\frac{25}{256}$$

求める確率は，⑴の確率から $x_5=1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を引いて

$$\frac{63}{256}-\frac{25}{256}=\frac{38}{256}=\frac{19}{128}\quad\cdots答$$

⑶　点Pの移動は，右の図のような場合に限るので，求める確率は

$$34\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{17}{512}\quad\cdots答$$



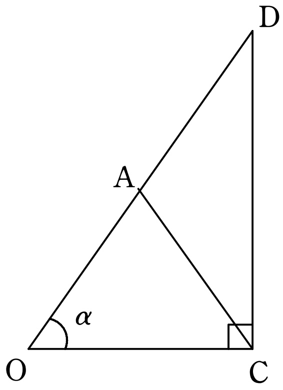
$\boxed{3}$

(1)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=1,\ \mathrm{OD}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$　であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{\cos\alpha}\vec{a}-\vec{c}\quad\cdots\text{答}$$

役割を変更して

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{\cos\beta}\vec{b}-\vec{c}\quad\cdots\text{答}$$



(2)　$\mathrm{OD}=\dfrac{1}{\cos\alpha},\ \mathrm{OE}=\dfrac{1}{\cos\beta}$ であるから，

△ODE において余弦定理により

$$\mathrm{DE}^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}-2\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\beta}\cdot\cos\gamma$$

また　$\mathrm{CD}=\mathrm{OD}\sin\alpha=\tan\alpha$

$\mathrm{CE}=\mathrm{OE}\sin\beta=\tan\beta$

であるから，△CDE において余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{\tan^2\alpha+\tan^2\beta-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}}{2\cdot\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{-1-1+\dfrac{2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}}{2\cdot\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\quad\cdots\text{答}$$

(3)　条件より　$\cos\theta=0$　よって　$\angle\mathrm{DCE}=\dfrac{\pi}{2}$

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$　であるから，△CDE の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}\tan\alpha\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$

また，OC⊥CD，OC⊥CE　より，直線 OC は平面 CDE と垂直である。

よって，四面体 OCDE の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{6}$$

また，(1) より△ODE の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\beta}\cdot\sin\gamma=\frac{\sin\gamma}{2\cos\gamma}$$

$$=\frac{1}{2}\tan\gamma$$

である。CP⊥(平面 ODE) であるから

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan\gamma\cdot\mathrm{CP}$$

よって　$\frac{1}{6}\tan\gamma\cdot\mathrm{CP}=\frac{1}{6}$

したがって　$\mathrm{CP}=\frac{1}{\tan\gamma}$　…答

別解 (3)　$\angle\mathrm{OCD}=\angle\mathrm{OCE}=\theta=\frac{\pi}{2}$ であるから，空間座標に埋め込むことができる。

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ であるから，C(0，0，0)，D($\tan\alpha$，0，0)，E$\left(0，\frac{1}{\tan\alpha}，0\right)$，O(0，0，1) ととることができる。

平面 ODE の方程式は　$\frac{x}{\tan\alpha}+(\tan\alpha)y+z=1$

よって，点と平面の距離公式により

$$\mathrm{CP}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\tan^2\alpha}+\tan^2\alpha+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}-1+\frac{1}{\cos^2\alpha}-1+1}}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha}}$$

$$=\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{1-\cos^2\gamma}}=\frac{1}{\tan\gamma}$$　…答

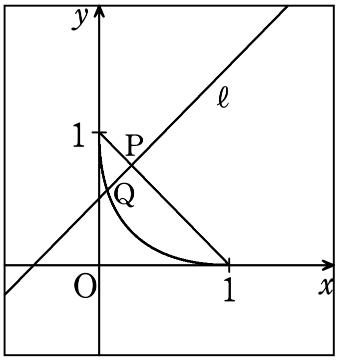
$\boxed{4}$

(1)　A(0, 1) とする。AP$=t$ であるから，P$\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ 1-\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ とおける。　$(0\leqq t\leqq\sqrt{2})$

直線 ℓ は，点 P を通り傾きが 1 であるから，その方程式は

$$y=x-\frac{t}{\sqrt{2}}+1-\frac{t}{\sqrt{2}}$$

よって　$y=x+1-\sqrt{2}\,t$　…答



(2)　C の方程式から　$\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$

両辺は 0 以上であるから 2 乗して

$$y=x-2\sqrt{x}+1$$

これと (1) から

$$x+1-\sqrt{2}\,t=x-2\sqrt{x}+1$$

$$2\sqrt{x}=\sqrt{2}\,t$$

よって，点 Q の x 座標は $\dfrac{t^2}{2}$ である。

線分 PQ の長さは，点 P，Q の x 座標の差の $\sqrt{2}$ 倍であるから

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{t^2}{2}\right)=t-\frac{t^2}{\sqrt{2}}$$　…答

(3)　求める体積は，線分 PQ を 線分 S の周りに 1 回転した円を AP 方向に積分するので，(2) より

$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{PQ}^2dt$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(t^2-\sqrt{2}\,t^3+\frac{t^4}{2}\right)dt$$

$$=\pi\left[\frac{t^3}{3}-\frac{\sqrt{2}\,t^4}{4}+\frac{t^5}{10}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{15}$$　…答