$\boxed{1}$

(1)　$3x+11y=1$ の整数解の1つは，$x=4$，$y=-1$ …答

(2)　$3x+11y=1000$ …① の整数解の1つは，$x=4000$，$y=-1000$

$3\times4000+11\times(-1000)=1000$ …②

①−②より

$3(x-4000)+11(y+1000)=0$

$3(x-4000)=-11(y+1000)$

3と11は互いに素であるから，整数kを用いて

$x-4000=11k$，$y+1000=-3k$

よって，$x=11k+4000$，$y=-3k-1000$ …答

(3)　$x=11k+4000$，$y=-3k-1000$ のとき，$|x-y|=|14k+5000|$

これは，$k=-357$ のとき最小値2をとる。…答

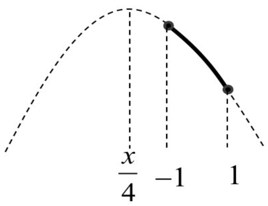
そのとき，$x=73$，$y=71$ である。…答

$\boxed{2}$

(1) $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$ より，

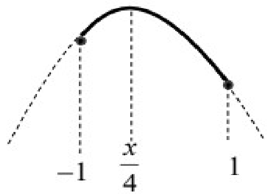
$$f(\theta)=1-2\sin^2\theta+x\sin\theta-y-1$$
$$=-2\sin^2\theta+x\sin\theta-y$$
$$=-2\left(\sin\theta-\frac{x}{4}\right)^2+\frac{x^2}{8}-y \quad (-1\leqq\sin\theta\leqq1)$$

(i) $\dfrac{x}{4}<-1$，すなわち $x<-4$ のとき



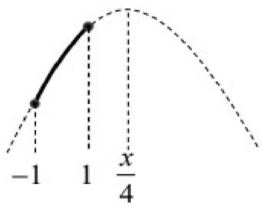
$\sin\theta=-1$ で $-x-y-2$

(ii) $-1\leqq\dfrac{x}{4}\leqq1$，すなわち $-4\leqq x\leqq4$ のとき



$\sin\theta=\dfrac{x}{4}$ で最大値 $\dfrac{x^2}{8}-y$

(iii) $1<\dfrac{x}{4}$，すなわち $4<x$ のとき



$\sin\theta=1$ で最大値 $x-y-2$

よって，$f(\theta)$ の最大値は次のようになる。

$$\begin{cases} x<-4 \text{ のとき } -x-y-2 & (\sin\theta=-1\text{ のとき}) \\ -4\leqq x\leqq4 \text{ のとき } \dfrac{x^2}{8}-y & \left(\sin\theta=\dfrac{x}{4}\text{ のとき}\right) \\ 4<x \text{ のとき } x-y-2 & (\sin\theta=1\text{ のとき}) \end{cases}$$ …答

(2) $0\leqq\theta<2\pi$ であるすべての θ について $f(\theta)<0$ が成り立つには，$f(\theta)$ の最大値が０より小さくなればよい。

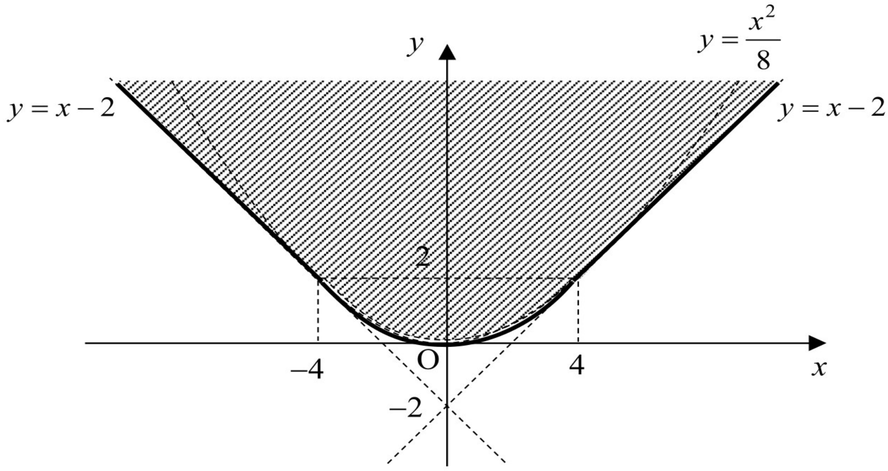
(1)より，

$x<-4$ のとき $-x-y-2<0$ すなわち $y>-x-2$

$-4\leqq x\leqq4$ のとき $\dfrac{x^2}{8}-y<0$ すなわち $y>\dfrac{x^2}{8}$

$4<x$ のとき $x-y-2<0$ すなわち $y>x-2$

よって，求める領域は次のようになる。ただし，境界線上の点は含まない。　…答



$\boxed{3}$

(1)　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より，

$$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}$$

$$2^x+2^{-x}\geqq 2$$

等号成立は，$2^x=2^{-x}$，つまり，$x=0$ のとき

となる。よって，最小値は2である。そのときのxの値は0である。　…㊟

(2)　$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$ より

$16^x+16^{-x}=(4^x+4^{-x})^2-2=(t^2-2)^2-2=t^4-4t^2+2$

よって

$$y=16^x+16^{-x}+4(2^x+2^{-x})^2-125\times\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})$$

$$=t^4-4t^2+2+4t^2-\frac{125}{2}t\quad(t\geqq 2)$$

$$=t^4-\frac{125}{2}t+2\quad\cdots㊟$$

(3)　(2)より，$y=f(t)$ とおくと，

$$f'(t)=4t^3-\frac{125}{2}=4\left(t^3-\frac{125}{8}\right)$$

$f'(t)=0$ となるのは，$t^3=\dfrac{125}{8}$ より $t=\dfrac{5}{2}$ のときである。

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	2	$\cdots$	5/2	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	極小かつ最小	↗

$f(t)$ は $t=\dfrac{5}{2}$ で最小となる。このとき，

$$2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$$

$$(2^x)^2+1=\frac{5}{2}\cdot 2^x$$

$$2\cdot(2^x)^2-5\cdot 2^x+2=0$$

$$(2\cdot 2^x-1)(2^x-2)=0$$

$$2^x=\frac{1}{2},\ 2$$

$$x=-1,\ 1$$

よって，関数 y が最小となるときの x の値は $x=-1,\ 1$ である。　…㊟

$\boxed{4}$

（1）辺 OA：$y=z=0$ $(0\leqq x\leqq n)$ と平面 $x=k$ との交点は，$(k,0,0)$　(図1)

辺 AB：$x+y=n$ $(0\leqq x\leqq n)$，$z=0$ と平面 $x=k$ との交点は，$(k,n-k,0)$　(図2)

辺 AC：$2x+z=2n$ $(0\leqq x\leqq n)$，$y=0$ と平面 $x=k$ との交点は，$(k,0,2n-2k)$　(図3)

よって三角形 T_k の頂点は，$(k,0,0)$，$(k,n-k,0)$，$(k,0,2n-2k)$ である。　…答

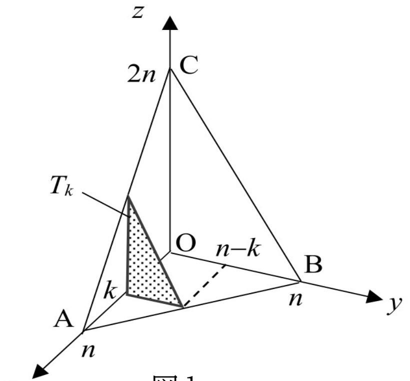


図1

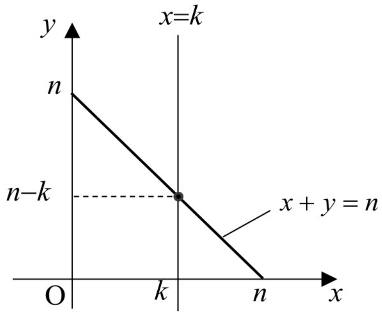


図2

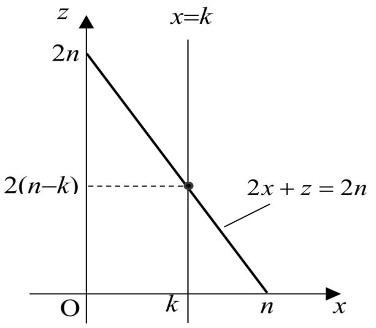


図3

（2）T_kにおいて，$y=i$ のとき，$z=-2i+2n-2k-1$ であるから

題意の点の $y=i$ であるものは，$-2i+2n-2k-1$（個）

（ⅰ）$n\geqq 3$ の場合

求める点の個数は $1\leqq k\leqq n-2$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{n-k-1}(-2i+2n-2k-1)=\sum_{i=1}^{n-k-1}\{2(-i+n-k)-1\}$$

である。$j=-i+n-k$ とおくと，$i=1,2,\cdots,n-k-1$ のとき $j=n-k-1,n-k-2,\cdots,1$ であるから，

$$\sum_{i=1}^{n-k-1}\{2(-i+n-k)-1\}=\sum_{j=1}^{n-k-1}(2j-1)=(n-k-1)^2 \cdots①$$

である。$k=n-1$ のときも0 個(図５)で①式は成り立つ。

（ⅱ）$n=2$ の場合

$1\leqq k\leqq n-1$ より $n=2$ のとき k のとる値は $k=1$ のみとなる。

このときの三角形 $T_k(=T_1)$ は図５の $n=2$ の場合であるから，

その内部に含まれる格子点は0 個で①式は成り立つ。

（ⅰ），（ⅱ）より，求める点の個数は $(n-k-1)^2$ である。　…答

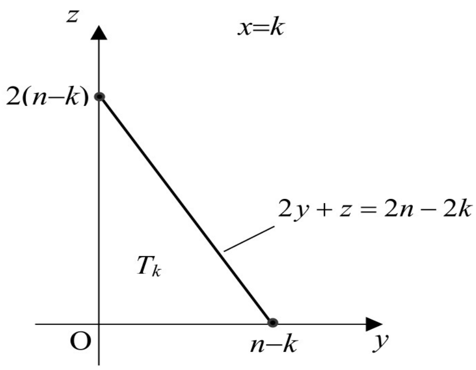


図4

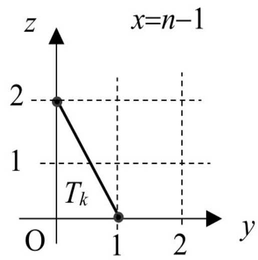


図5

（3）求める点の個数は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)^2$ である。

$n\geqq 3$ のとき，$j=n-k-1$ とおくと，$k=1,2,\cdots,n-2,n-1$ のとき $j=n-2,n-1,\cdots,1,0$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)^2=\sum_{j=0}^{n-2}j^2=\sum_{j=1}^{n-2}j^2=\frac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3) \cdots②$$

$n=2$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)^2=\sum_{k=1}^{1}(1-k)^2=0$ となり②式は成り立つ。

よって，求める点の個数は $\dfrac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3)$ である。　…答