$\boxed{1}$

(1)　$3x+11y=1$ の整数解の1つは，$x=4$，$y=-1$　…答

(2)　$3x+11y=1000$…① の整数解の1つは，$x=4000$，$y--1000$

$3\times4000+11\times(-1000)=1000$…②

①−②より

$3(x-4000)+11(y+1000)=0$

$3(x-4000)=-11(y+1000)$

3と11は互いに素であるから，整数kを用いて

$x-4000=11k$，$y+1000=-3k$

よって，$x=11k+4000$，$y=-3k-1000$　…答

(3)　$x=11k+4000$，$y=-3k-1000$ が自然数のとき，

$x=11k+4000\geqq1$，$y=-3k-1000\geqq1$ より $-\dfrac{1001}{3}\leqq k\leqq-\dfrac{3999}{11}$

k は整数であるから，$-363\leqq k\leqq-334$

$|x-y|=|14k+5000|$ であるから，$-363\leqq k\leqq-334$ のとき，

$k=-334$ のとき最大値 324 をとる。　…答

そのとき，$x=326$，$y=2$ である。　…答

2

(1)　辺OA：$y=z=0\ (0\leqq x\leqq n)$ と平面 $x=k$ との交点は，$(k,0,0)$　(図1)

辺AB：$x+y=n\ (0\leqq x\leqq n)$，$z=0$ と平面 $x=k$ との交点は，$(k,n-k,0)$　(図2)

辺AC：$2x+z=2n\ (0\leqq x\leqq n)$，$y=0$ と平面 $x=k$ との交点は，$(k,0,2n-2k)$　(図3)

よって三角形 T_k の頂点は，$(k,0,0)$，$(k,n-k,0)$，$(k,0,2n-2k)$ である。　…答

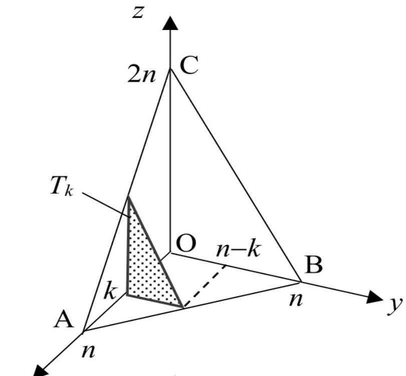


図1

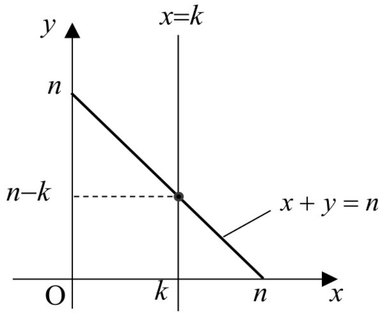


図2

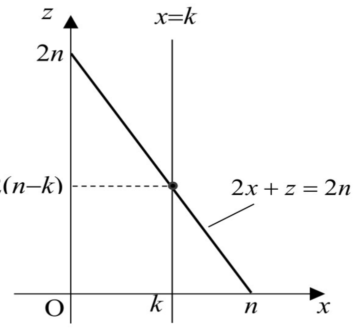


図3

(2)　T_kにおいて，$y=i$ のとき，$z=-2i+2n-2k-1$ であるから

題意の点の $y=i$ であるものは，$-2i+2n-2k-1$（個）

(i) $n\geqq 3$ の場合

求める点の個数は $1\leqq k\leqq n-2$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{n-k-1}(-2i+2n-2k-1)=\sum_{i=1}^{n-k-1}\{2(-i+n-k)-1\}$$

である。$j=-i+n-k$ とおくと，$i=1,2,\cdots,n-k-1$

のとき $j=n-k-1,n-k-2,\cdots,1$ であるから，

$$\sum_{i=1}^{n-k-1}\{2(-i+n-k)-1\}=\sum_{j=1}^{n-k-1}(2j-1)=(n-k-1)^2\ \cdots①$$

である。$k=n-1$ のときも0個(図5)で①式は成り立つ。

(ii) $n=2$ の場合

$1\leqq k\leqq n-1$ より $n=2$ のとき k のとる値は $k=1$ のみとなる。

このときの三角形 $T_k\,(=T_1)$ は図5の $n=2$ の場合であるから，

その内部に含まれる格子点は0個で①式は成り立つ。

(i)，(ii)より，求める点の個数は $(n-k-1)^2$ である。　…答

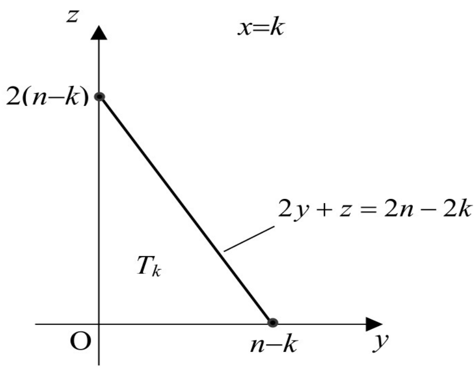


図4

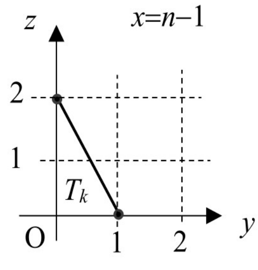


図5

(3)　求める点の個数は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)^2$ である。

$n\geqq 3$ のとき，$j=n-k-1$ とおくと，$k=1,2,\cdots,n-2,n-1$ のとき $j=n-2,n-1,\cdots,1,0$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)^2=\sum_{j=0}^{n-2}j^2=\sum_{j=1}^{n-2}j^2=\frac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3)\ \cdots②$$

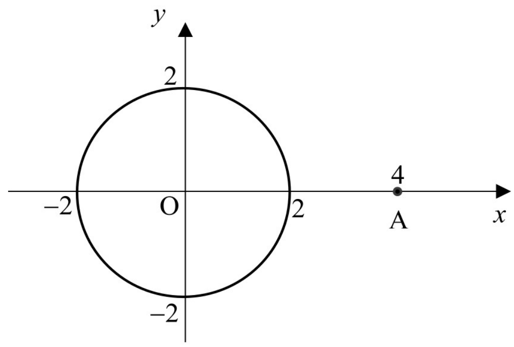
$n=2$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)^2=\sum_{k=1}^{1}(1-k)^2=0$ となり②式は成り立つ。

よって，求める点の個数は $\dfrac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3)$ である。　…答

3

点Ｐは円Ｃ上の点であるから，$a^2+b^2=4$　①

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(a-4\,,\,b)\perp l_p$　かつ　l_p は点$\left(\dfrac{a+4}{2},\dfrac{b}{2}\right)$を通るので



$$(a-4)\left(x-\frac{a+4}{2}\right)+b\left(y-\frac{b}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-4)x+by=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-8$$

$$\Leftrightarrow (a-4)x+by=-6 \quad (①より)\quad \cdots 答$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,b)\,/\!/\,l_p$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$　であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=a^2-4a+b^2=0$$

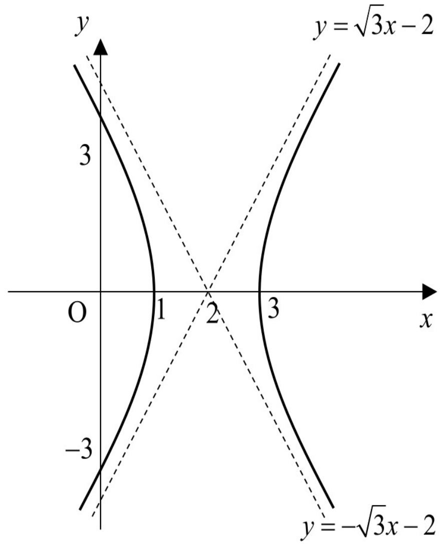
①より　$4-4a=0 \Leftrightarrow a=1$　$b=\pm\sqrt{3}$

以上より　$P(1\,,\,\pm\sqrt{3})$　…答

(3)　求める交点Qの軌跡は　l_p：$ax+by=4x-6$ と直線OP：$bx-ay=0$ とから

$a\,,\,b$ を消去して得られる $x\,,\,y$ の関係式として与えられる。

これより



$$(ax+by)^2+(bx-ay)^2=(4x-6)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2)x^2+(a^2+b^2)y^2=16x^2-48x+36$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2=16x^2-48x+36$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=4x^2-12x+9$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2)^2-y^2=3$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2-\frac{y^2}{3}=1$$

これは漸近線を $y=\pm\sqrt{3}(x-2)$ にもつ双曲線を表す。

(右図)　…答

【別解】

(3)　Pは円C上の点であるから　OP＝2 を満たす。

このとき、求める点Qにおいて $|\mathrm{OQ}-\mathrm{PQ}|=2$であり、QはAPの垂直二等分線上の点でもあるから

$\mathrm{PQ}=\mathrm{AQ}$ となり，$|\mathrm{OQ}-\mathrm{AQ}|=2$ が成り立つ。これにより点QはO，A を焦点とする双曲線を表す。

ここで、O，A を x 軸方向に -2 平行移動して　$(-2\,,\,0)$，$(2\,,\,0)$

これらを焦点とする双曲線は　$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　　元に戻して，$(x-2)^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

$\boxed{4}$

（1）扇形の部分は，合わせると半径が1の円であるから，その面積は π である。

また，$\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}=3\cos\theta$ より $\mathrm{BC}=6\cos\theta$ だから，

長方形の面積の和は，$2\times1\times3+1\times6\cos\theta$ である。

よって，$S_1=\pi+6+6\cos\theta$ である。　…答

（2）$\angle\mathrm{BAC}=\pi-2\theta$ だから △ABCの面積Sは，$\mathrm{S}=\dfrac{1}{2}\times3\times3\times\sin(\pi-2\theta)=\dfrac{9}{2}\sin2\theta$，

$\dfrac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})\times r(\theta)=\mathrm{S}$ より，$3(1+\cos\theta)\times r(\theta)=\dfrac{9}{2}\sin2\theta$

よって，$r(\theta)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sin2\theta}{1+\cos\theta}$ である。　…答

（3）$f(\theta)=\dfrac{\sin2\theta}{1+\cos\theta}\left(0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおく。$f'(\theta)$ の分母は $(1+\cos\theta)^2>0$ である。

$$
\begin{aligned}
f'(\theta)\text{の分子}&=2\cos2\theta(1+\cos\theta)-\sin2\theta\times(-\sin\theta)\\
&=2(2\cos^2\theta-1)(1+\cos\theta)+2\sin^2\theta\cos\theta\\
&=2(1+\cos\theta)(2\cos^2\theta-1+\cos\theta-\cos^2\theta)\\
&=2(1+\cos\theta)(\cos^2\theta+\cos\theta-1)
\end{aligned}
$$

ここで，$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq\cos\theta<1$ だから

$\cos^2\theta+\cos\theta-1>\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}>0$ である。

よって，$f'(\theta)>0$ であるから $f(\theta)$ は単調増加。

したがって，$r(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ で最大となる。

ゆえに，最大値は $r\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{3}{2+\sqrt{2}}$　…答

（4）証明　（3）より，S_2 の最大値は $\left(\dfrac{3}{2+\sqrt{2}}\right)^2\pi<\pi$　$\left(\because\ \dfrac{3}{2+\sqrt{2}}<1\right)$

よって，$S_1>S_2$ が成り立つ。終