２０２４年度入学試験問題

数　　　学

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ａ・数学Ｂ）

注　　　意

1　問題冊子は１冊（２ページ），解答用紙は４枚，下書き用紙は３枚です。

2　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により解答できない場合は，手を高く挙げて監督者に知らせなさい。

3　すべての解答用紙の受験番号記入欄２箇所に受験番号を正しく記入しなさい。

4　解答は指定された解答用紙の解答欄に書きなさい。裏面は採点の対象になりません。また，答えだけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。

5　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

数　学（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B）

1

m，n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れることを示せ。

(2) x^n-1 を x^2+x+1 で割った余りを求めよ。

(3) $x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った余りを求めよ。

2

数直線上を動く点Pがある。点Pは，原点Oを出発して，1枚のコインを1回投げるごとに，表が出たら数直線上を正の向きに1だけ進み，裏が出たら数直線上を負の向きに1だけ進むものとする。コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ であるとし，コインを n 回投げ終えた時点での点Pの座標を x_n とする。コインを10回投げるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

(2) $x_5 \neq 1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

(3) $0 \leqq x_n \leqq 2$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

3

平面上に三角形ABCを考え，その重心をGとする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2) 平面上の任意の点Pに対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=3|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2$$

(3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2}{3}$$

(4) 三角形ABCの外接円の半径を R とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$R^2 \geqq \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2}{9}$$

4

座標平面において，放物線 $y=-x^2+1$ を C，原点を中心とする半径 r の円を D とする。ただし，$r>0$ とする。放物線 C と円 D は共有点をもたないとする。以下の問いに答えよ。

(1) r の値の範囲を求めよ。

(2) $0<\theta<\pi$ のとき，円 D 上の点 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ における D の接線を ℓ とする。接線 ℓ と放物線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。ただし，S は r と $\sin\theta$ を用いて表すこと。